

1. WAVELET

(1) 時間と周波数領域のデータ解析手法

時間と周波数領域のデータ解析手法として、次の 3 手法があります。

① フーリエ変換

フーリエ変換は正弦波による周期信号の展開をベースとしています。時間領域で定常と仮定しています。すべての波は正弦波という前提です。

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$
$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

② 短時間フーリエ変換

実際の信号は時間的に変動します。この影響を考慮するため、時刻 $t=b$ まわりで局在する窓関数 $w(t-b)e^{-j\omega t}$ を用いて修正したフーリエ変換を短時間フーリエ変換と言います。窓幅は一定。

$$X(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) w(t-b) e^{-j\omega t} dt$$

③ ウェーブレット変換

さらに、時刻ごとに周波数特性を抽出する手法をウェーブレット変換と言います。

ウェーブレット変換は、窓関数と信号との相互相関関数として考えられます。

周波数に応じて窓幅を変化させるウェーブレット変換には、連続ウェーブレット変換と離散ウェーブレット変換があります。

窓（母）関数は、連続ウェーブレット変換： $\varphi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)$

離散ウェーブレット変換： $\varphi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \varphi\left(\frac{t-nb_0a_0^m}{a_0^m}\right)$

$$\tilde{x}(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi_{a,b}^*(t) dt \quad (\text{continuous wavelet transform})$$

a : 伸長パラメータ、 b : 位置パラメータ

m : レベル、 n : サンプルデータ数

時間軸上の b を順次増加していき、位置 b を中心とした a のすべてのスケールの範囲に対しコヒーレント構造を同定します。

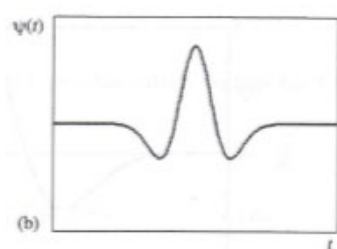
ウェーブレット変換の母関数 φ は、フーリエ変換の $\cos/\sin$ 相当します。

母関数 φ (Mexican hat, Harr, Morlet, Daubechies(db), Symmlets, Coiflets, - -) は、信号の性質と窓関数の特性の両方に依存して選択されます。 $\varphi(t)$ の例、

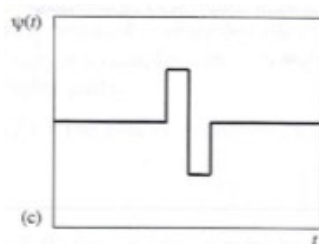
Mexican hat: $\varphi(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$

Harr: $\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$

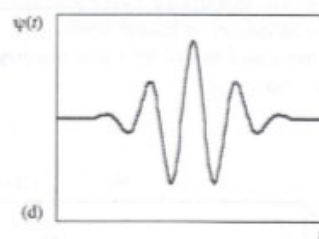
Morlet: $\varphi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp(i2\pi f_0 t) \exp(-t^2/2)$



Mexican hat



Harr



Morlet

(2) 離散ウェーブレット変換 信号の分解 (近似と詳細)

離散ウェーブレットでは、原信号を近似と詳細に分割していきます。

近似 $x_m(t)$ と詳細 $d_m(t)$ の関係は、

$$x_m(t) = x_{m-1}(t) - d_m(t)$$

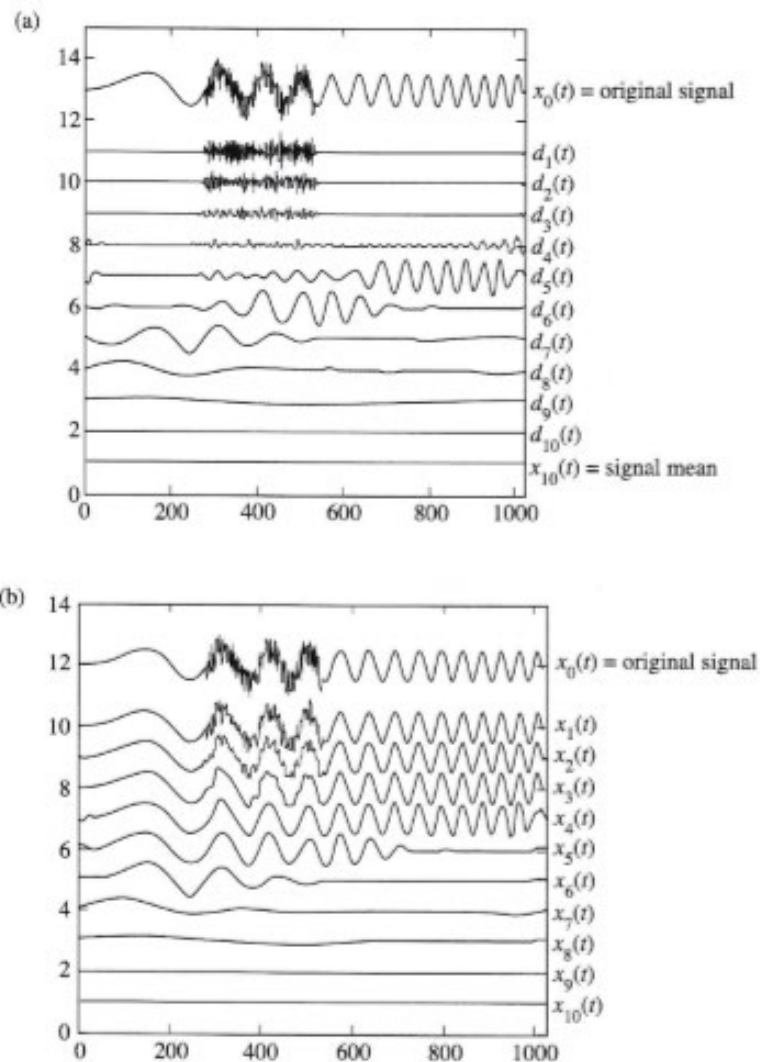
と表されます。下図の(a)は詳細、(b)は近似です。 t は時間、 m はレベル。

例えば、

$m = 1$ の場合、

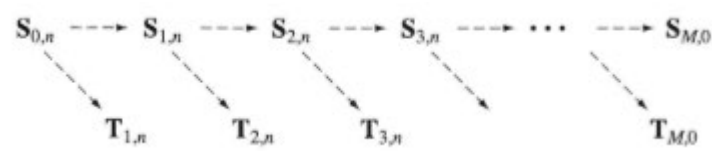
$$x_1(t) = x_0(t) - d_1(t) \quad \rightarrow \quad x_0(t) = x_1(t) + d_1(t)$$

オリジナル信号は近似 $x_1(t)$ に詳細の $d_1(t)$ を加算した信号となります。



出典：The Illustrated Wavelet Transform Handbook, Figure 3.5, page 80

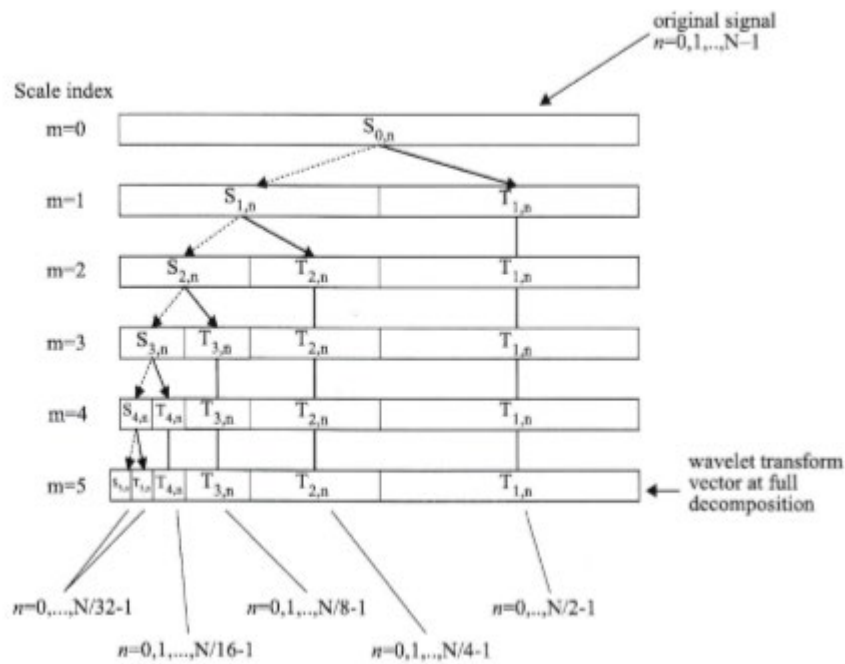
近似係数を S ，詳細係数を T としますと、下図の様に分解されて行きます。



ここに、 M は分解レベル、 n は信号のサンプル数

S は lowpass filter を通して生成され、 T は highpass filter を通して生成されます。

各レベルの分解図を下図に示します。

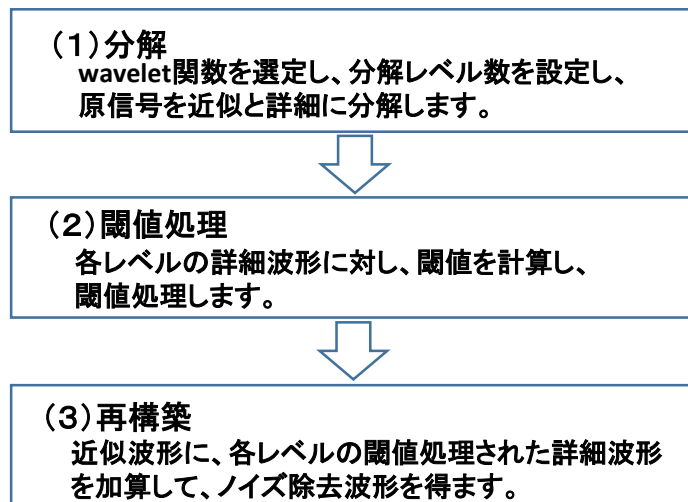


出典：The Illustrated Wavelet Transform Handbook,Figure 3.6, page82

各レベルで変換係数ベクトル W_i^{scale} （wavelet係数）が得られます。

1.1 Wavelet Denoising (Matlab)の流れ

BBrainAnalyzer の Wavelet ノイズ除去機能は、表示形式は異なりますが、Matlab と同様な処理をしています。



1.2 分解

1.1 で信号を分解しますと、下図の様に近似波形とレベル数に応じた詳細波形が得られます・

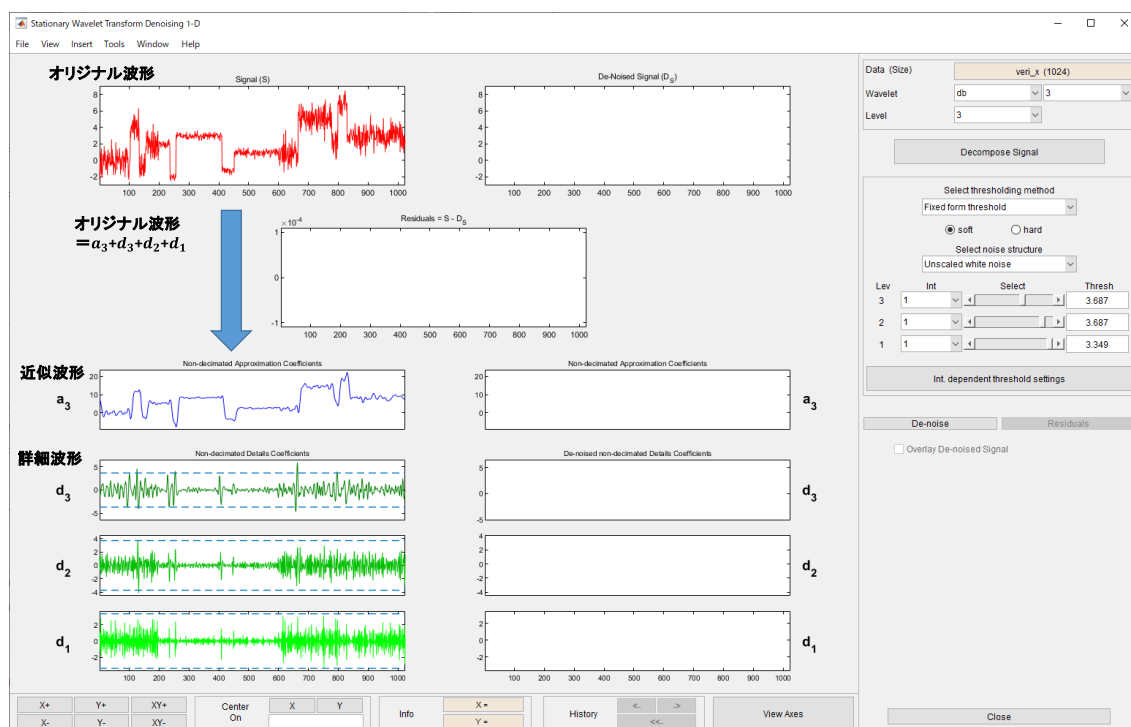


図 1.1

1.3 閾値処理

信号からノイズを除去します。各々のスケールのウェーブレット係数のある平均的な値、例えば標準偏差や絶対偏差の平均などに関連した値が閾値 λ として設定されます。閾値以上の係数は信号の整合性のある部分に対応すると想定し、閾値以下の係数は信号のランダムな部分やノイズに対応すると想定しゼロにする操作です。

例えば、通常使われている閾値 λ の一つに universal threshold が有ります。

$$\lambda_u = (2\ln(N))^{1/2}\sigma$$

N は長さ、 σ は考察対象信号の雑音の標準偏差

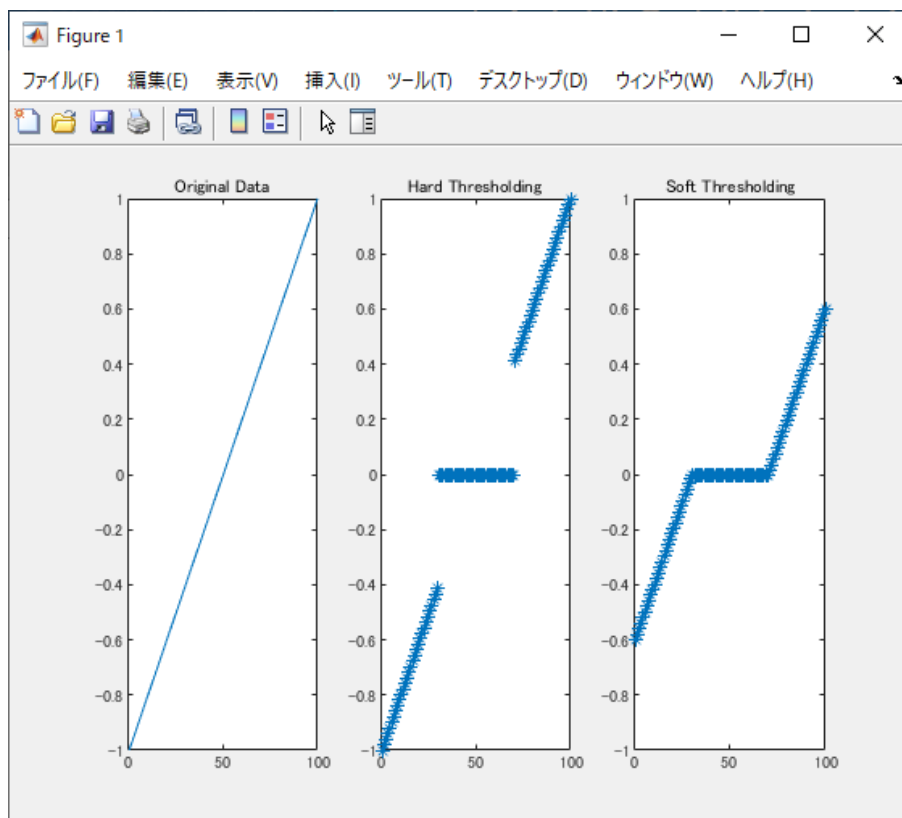
閾値の値決めは重要となります。

閾値処理方法として、ハード閾値処理とソフト閾値処理の 2 つの方法があります。

$$W_i^{hard} = \begin{cases} 0 & |W_i| < \lambda \\ W_i & |W_i| \geq \lambda \end{cases}$$

$$W_i^{hard} = \begin{cases} W_i - \lambda & W_i > \lambda \\ 0 & |W_i| \leq \lambda \\ W_i + \lambda & W_i < -\lambda \end{cases}$$

処理結果の例を下図に示します。縦軸は閾値、横軸はデータ。



この閾値 λ を計算するオプションとして、

sqtwolog, rigrsure, minimaxi を採用しています。

sqtwolog: uses a fixed form threshold yielding minimax performance multiplied by a small factor proportional $\log(\text{length}(n))$

rigrsure: uses for the soft threshold estimator a threshold selection rule based on Stein's Unbiased Estimate of Risk (quadratic loss function).

minimaxi: uses a fixed threshold chosen to yield minimax performance for mean square error against an ideal procedure. The minimax principle is used in statistics to design estimators. Since the denoised signal can be assimilated to the estimator of the unknown regression function, the minimax estimator is the option that realizes the minimum, over a given set of functions, of the maximum mean square error.

また、ここでノイズ構造の選択が有ります。

one: unscaled white noise

sln: scaled white noise

mln: non-white noise

• '**one**' corresponds to the basic model.

In general, you can ignore the noise level and it must be estimated. The detail coefficients $cD1$ (the finest scale) are essentially noise coefficients with standard deviation equal to σ . The median absolute deviation of the coefficients is a robust estimate of σ . The use of a robust estimate is crucial for two reasons. The first one is that if level 1 coefficients contain f details, then these details are concentrated in a few coefficients if the function f is sufficiently regular. The second reason is to avoid signal end effects, which are pure artifacts due to computations on the edges.

• '**sln**' handles threshold rescaling using a single estimation of level noise based on the first-level coefficients.

When you suspect a nonwhite noise e , thresholds must be rescaled by a level-dependent estimation of the level noise. The same kind of strategy as in the previous option is used by estimating lev level by level.

This estimation is implemented in M-file `wnoisest`, directly handling the wavelet decomposition structure of the original signal `s`.

- '`mln`' handles threshold rescaling using a level-dependent estimation of the level noise.

生体信号の特性に拠り、選択する母関数、レベル数、閾値処理は変わります。

1.4 再構築

近似波形に、各レベルの閾値処理された詳細波形を加算して、ノイズ除去波形を得ます。

- 閾値処理及び再構築を図 1.2（次頁）で解説します。

以上

[参考文献]

1. 「Wavelet Toolbox 概説書」、The MathWorks, Inc. 2009
2. 「図説 ウェーブレット変換ハンドブック」、新 誠一、中野和司 監訳、朝倉書店、2005
3. "Wavelet Denoising and Nonparametric Function Estimation", Mathworks

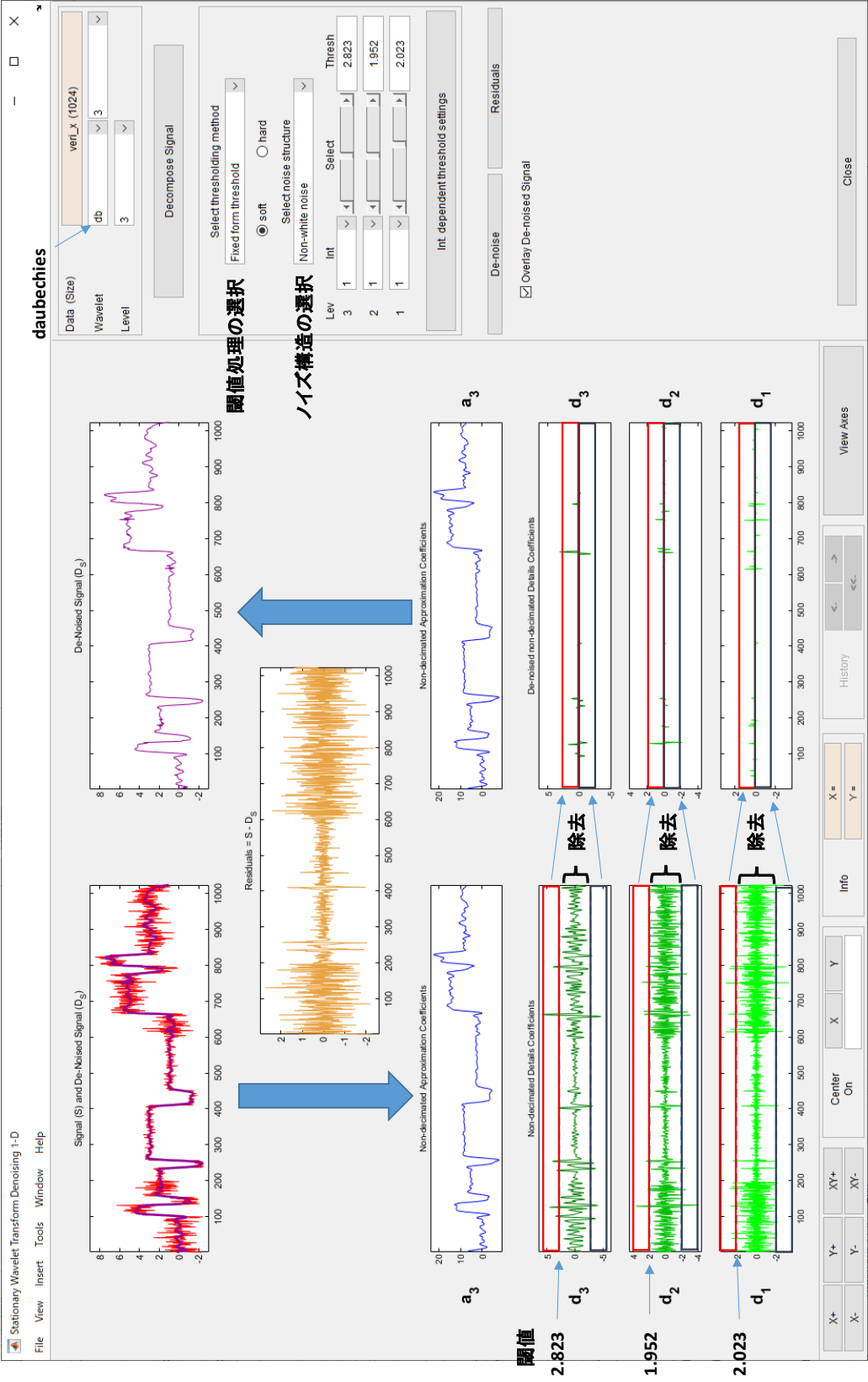


図 1.2